Chủ đề : GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

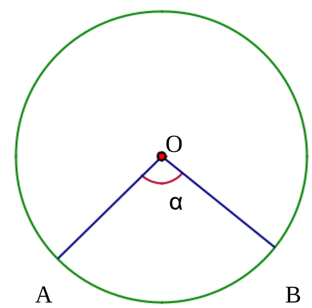
GÓC Ở TÂM – GÓC NỘI TIẾP – GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG
GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG, BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

🗁. GÓC Ở TÂM

🗁. Lý thuyết

A. Kiến thức cần nhớ

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



Nếu $0^0 < \alpha < 180^\circ$ thì cung nằm bên trong góc được gọi là *cung nhỏ* và cung nằm bên ngoài góc được gọi là *cung lớn.*

Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.

Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn

2. Số đo cung

Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).

Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

Chú ý : "*Cung không*" có số đo bằng 0^0 và cung *cả đường tròn* có số đo bằng 360° .

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau :

Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

4. Khi nào thì sđ AB = sđ AC + sđCB ?

Nếu điểm C là một điểm nằm trên cung AB thì : sđ AB = sđ AC + sđ CB .

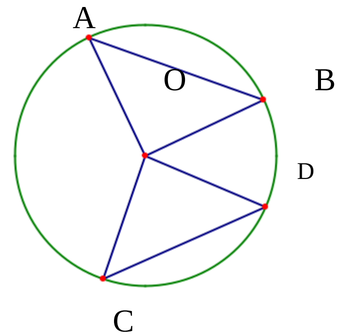
5. Định lý 1: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Trong hình bên : $AB = CD \Leftrightarrow$ AB=CD.

6. Định lý 2: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :



a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Trong hình bên : $AB < CD \Leftrightarrow AB<CD$

7. Định lí bổ sung

Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thỡ qua trung điểm của dây căng cung ấy (đảo lại không đúng)

Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- ✓ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ✓ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- ✓ Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0 . Cung cả đường tròn có số đo 360^0 .
- ✓ Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.
- ✓ Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

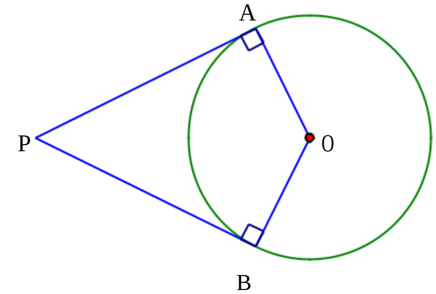
. Bài tập

Bài 1: Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Biết $APB = 55^0$. Tính số đo cung lớn AB.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Tính góc ở tâm trước, rồi tính số đo cung nhỏ AB. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

Trình bày lời giải



Tứ giác APBO có $OAP = 90^\circ; OBP = 90^\circ$ (vì PA, PB là tiếp tuyến), $\overline{APB} = 55^0$ nên:

$AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 55^0 = 125^\circ$ (tổng các góc trong tứ giác AOBP) suy ra số đo cung nhỏ AB là 125^0.

Vậy số đo cung lớn AB là: $360^0 - 125^0 = 235^0$.

Bài 2: Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết $AMB = 40^0$.

a) Tính AMO và AOM.

b) Tính số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB lớn.

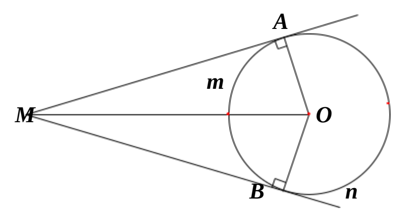
Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau từ đó tính ra góc ở tâm. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

Trình bày lời giải

a) Do MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên

MO là tia phân giác của AMB hay $AMO = \frac{1}{2} AMB = 20^0$.



Tam giác AMO vuông tại A, tính được $AOM = 70^0$.

OM là tia phân giác của AOB nên $AOB = 2.AOM = 140^0$

b) sđ AmB = sđ $AOB = 140^0$

sđ $AnB = 360^0 - 140^0 = 220^0$.

Bài 3: Trên một đường tròn (O) có cung AB bằng 140° . Gọi A′. B′ lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua O; lấy cung AD nhận B′ làm điểm chính giữa; lấy cung CB nhận A′ làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ CD .

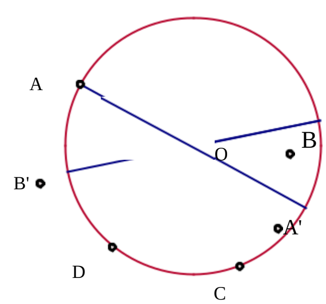
Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. OA và OA′ là hai tia đối nhau nên sđ AA' = 180° . Do AD nhận B′ là điểm chính giữa cung nên sđ $AB' = sd B'D$. Tương tự sđ BA' = 180^0 ′ $sd A'B = sd A'C$ từ đó tính được số đo cung DC

Trình bày lời giải

Ta có $AOB' = BOA'$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow sd AB' = sd A'B$



B′ và C′ lần lượt là điểm chính giữa cung AD và cung BC nên ta có $sd AB' = sd B'D$; $sd A'B = sd A'C$

sđ AB = 140° mà A′ là điểm đối xứng với A qua O nên

sđ $AOA' = 180^0$

lại có s® AB + s® $BA' = 180^0 \Rightarrow$ sđ $BA' = 40°$ = sđ $AB' = 40°$.

$\Rightarrow$ sđ $AC = 40° \Rightarrow$ sđ CB = 80°

sđ AB = 40′° 40° 0 − 40° − 80° = 60° .

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính $\widehat{AOM}$;

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung AB nhỏ;

c) Biết OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

Hướng dẫn giải

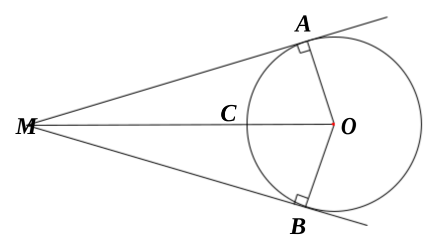
Tìm cách giải. Vận dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh (theo bán kính) từ đó tính ra được góc ở tâm.

Trình bày lời giải

a) Do MA và MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA \perp AO$ và $MB \perp BO$

Xét tam giác vuông MAO có

$\sin \widehat{AMO} = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^0$;



b) Tương tự **bài 1** tính được $\widehat{AOB} = 120^0$, sđ $\overset{\frown}{AB} = 120^0$;

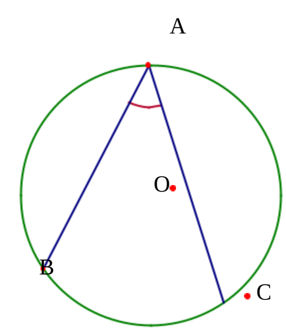
c) $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow AC = BC$.

🗁. GÓC NỘI TIẾP - GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

🗁. Lý thuyết

1. Định nghĩa .

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.



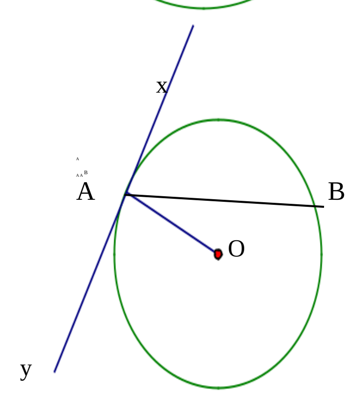
Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Trong hình bên thì

$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp

$\overset{\frown}{BC}$ là cung bị chắn

Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.



Theo hình bên thì

$\widehat{BAx}$ và $\widehat{BAy}$ là hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

2. Định lý .

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo góc của cung bị chắn.

3. Hệ quả 1. Trong một đường tròn :

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

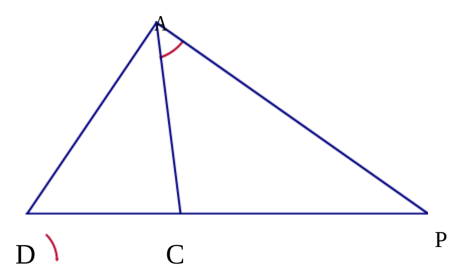
4. Hệ quả 2. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

5. Thêm dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến. Cho tam giác ACD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm P. Tia AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nếu thoả mãn một

<u>trong hai điều kiện sau :</u>

a) $ADC = PAC$;

b) $PA^2 = PC.PD$.



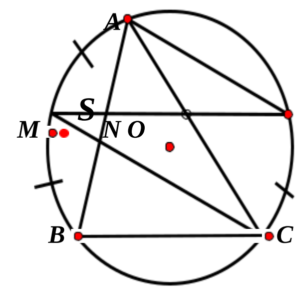
PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN

- ✓ Điểm nằm chính giữa cung chia cung đó thành 2 cung có số đo bằng nhau. Hai góc nội tiếp chắn hai cung đó thì bằng nhau.
- ✓ Để chứng minh đẳng thức hình học, suy nghĩ quy về chứng minh tam giác đồng dạng dựa vào các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau trong một đường tròn.
- ✓ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
- ✓ Góc nội tiếp (nhỏ hơn bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung

. Bài tập.

Bài 1: Cho đường tròn (O) có các dây cung AB, BC, CA. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ dây MN song song với BC và gọi S là giao điểm của MN và AC. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Hướng dẫn giải



Tìm cách giải. Vận dụng tính chất trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau từ đó chỉ ra các tam giác ASN và MSC cân tại S

Trình bày lời giải

Do M là điểm chính giữa cung nhỏ AB nên sđ MB= sđ MA
Do MN // BC nên

$NMC = MCB \Rightarrow$ sđ MB= sđ NC

Vậy

sđ MB = sđ MA= sđ NC
(hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)
$NAS = ANS$
(hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)
$SMC = SCM$

Vậy các tam giác ASN và MSC cân tại C $\Rightarrow SN = SA; SM = SC$

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại D và cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn (M, MB), K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

Hướng dẫn giải

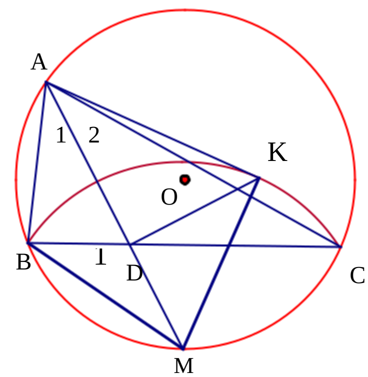
Tìm cách giải. Ta có: AKM = 90° nên DK $\perp$ AM $\Leftrightarrow \Delta DMK$ ” ΔKMA . Mặt khác hai tam giác có chung. Do yêu cầu chứng minh về góc nên để chứng minh hai tam giác đồng

AMK

dạng ta nên dùng c.g.c. Do vậy cần chứng minh tỉ số

$$\frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}.$$

Trình bày lời giải:



$A_1 = A_2$ mà $B_1 = A_2$ (góc nội tiếp) nên $B_1 = A_1$.

$\triangle MBD \backsim \triangle MAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}$

Kết hợp với $DMK = AMK$ (góc chung)

ta có: $\triangle DMK$ " $\triangle KMA$ (c.g.c) $\Rightarrow$ MDK = MKA = 90°

Vậy DK $\perp$ AM.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM.

a) Tính;

ACM

b) Chứng minh;

$BAH = OCA$

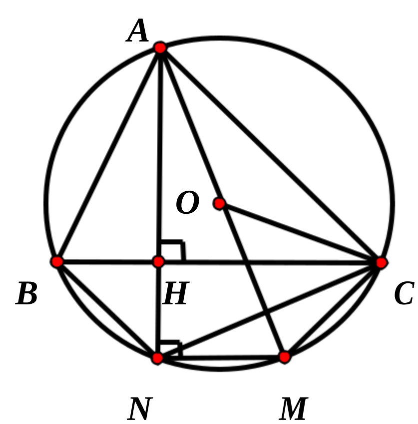
c) Gọi N là giao điểm AH với đường tròn (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Ta có: $ACM = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Nhận định tam giác AOC là tam giác cân nên nếu $BAH = OCA$ ta sẽ có $BAH = CAO$ từ đó tìm ra tam giác đồng dạng để giải toán.

Trình bày lời giải

a) Ta có $ACM = 90^0$ (góc nội tiếp).



b) Vì $ABC = AMC$ (cùng chắn cung AC) và

$AHB = ACM = 90^0$

Nên $\triangle ABH$ và $\triangle AMC$ đồng dạng (g-g)

$$\begin{matrix} BAH = OAC \\ OCA = OAC \end{matrix} \Rightarrow \Rightarrow BAH = OCA$$

c) $ANM = 90^0$, $AN \perp NM$ và $AN \perp BC$ nên MN // BC

$\Rightarrow MNBC$ là hình thang

$BC // MN \Rightarrow$ sđ BN = sđCM (xem chứng minh **Bài 1**)

$\Rightarrow$ sđ BM = sđ$CN \Rightarrow BM = CN \Rightarrow MNBC$ là hình thang cân.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Gọi D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E. (E nằm giữa C và D). Chứng minh rằng:

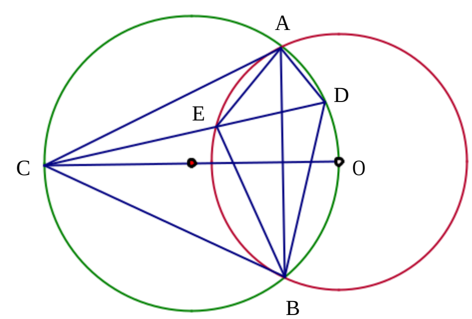
$BED = DAE$

b) $DE^2 = DA.DB$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải

- Trong quá trình chứng minh về góc, nên sử dụng tính chất về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng hệ quả của chúng.
- Để chứng minh $DE^2 = DA.DB$., nên ghép chúng vào hai tam giác có cạnh là DA, DB và DE là cạnh chung của hai tam giác, rồi chứng minh chung đồng dạng. Do đó ta chọn ΔBED và ΔEAD.



Trình bày lời giải

a) Ta có : $EBC = EAB$; $DCB = DAB$ nên

$EBC + DCB = EAB + DAB$.

Mặt khác : $EBC + DCB = BED$, $EAB + DAB = DAE$.

Vậy $BED = DAE$.

b) Ta có : $ADE = ABC = CAB = EDB$ mà theo câu a): $BED = DAE$, suy ra:

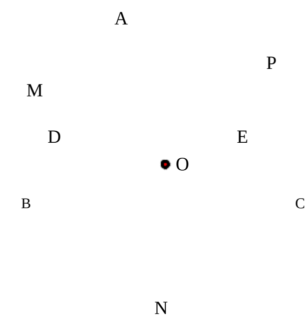
$$\Delta BED \backsim \Delta EAD \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DE^2 = DA.DB$$

Bài 5: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Khai thác điểm chính giữa của một cung , ta nhận được các tia phân giác của góc. Do vậy nếu khai thác tính chất đường phân giác của tam giác, ta được các tỉ số. Với suy luận đó, để chứng minh DE // BC ta cần vận dụng định lý Ta-lét đảo.

Trình bày lời giải:



$AP = PC \Rightarrow$ NE là đường phân giác của $\Delta ANC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AN}{NC}$ (1)

$AM = MB \Rightarrow$ ND là đường phân giác của $\Delta ANB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NB}$ (2)

$BN = NC \Rightarrow NB = NC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$, do đó DE // BC.

Bài 6: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Khai thác góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung dễ dàng chỉ ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ và $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$. Từ đó biến đổi các hệ thức để giải bài toán.

Trình bày lời giải

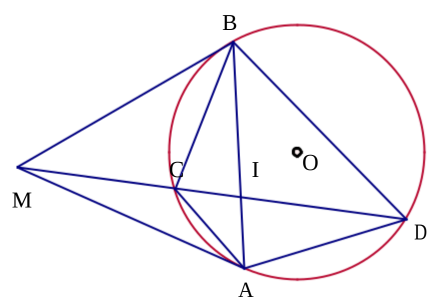
Ta có $MAC = ADC$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); AMD chung. Suy ra

$\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g-g) suy ra: $MA^2 = MC.MD$ và $\frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD}$

Tương tự: $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ suy ra: $\frac{MB}{MD} = \frac{BC}{BD}$

Xét $\frac{MC}{MD} = \frac{MC.MD}{MD^2} = \frac{MA^2}{MD^2} = \frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{MD} = \frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD}$ (1)

$\frac{IC}{ } = \frac{AC}{BD}$



$\Delta IBC \backsim \Delta IDA$ suy ra: $\frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD}$;

Do đó: $\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD} = \frac{IC}{IB}\cdot\frac{IB}{ID} = \frac{IC}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$.

Bài 7: Gọi CA, CB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) với A, B là các tiếp điểm. Vẽ đường tròn tâm I qua C và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Chỉ ra $KB^2 = KM.KA$ và $KC^2 = KM.KA$ từ đó suy ra KA = KB (K là giao điểm của AM và BC)

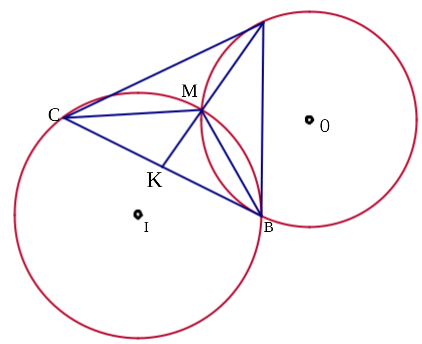
Trình bày lời giải

Gọi K là giao điểm của AM và BC.

Xét ΔKBM và ΔKAB có: K chung; $KBM = KAB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp chắn cùng chắn cung của (O)) BM

Do đó: ΔKBM" ΔKAB ⇒ $\frac{KB}{KA} = \frac{KM}{KB}$ ⇒ $KB^2 = KM.KA$ (1)

MCK = MBA (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung của (I)). $\overset{\frown}{BM}$



$KAC = MBA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AM cuả (O)).

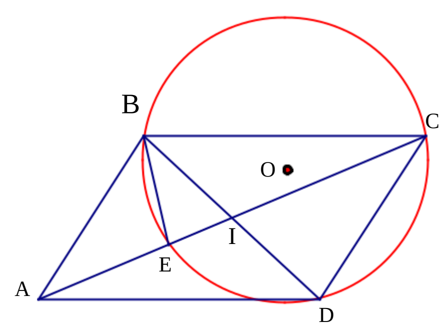
Do đó: MCK = KAC . Xét ΔKCM và ΔKAC có: K chung , MCK = KAC. Do đó

ΔKCM" ΔKAC ⇒ $\frac{KC}{KA} = \frac{KM}{KC}$ ⇒ $KC^2 = KM.KA$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $KC^2 = KB^2 \Rightarrow KC = KB$. Vậy AM đi qua trung điểm K của BC.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD, góc A < 90^0. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.

IA = IC ⇒ $IE.IA = IE.IC$

ΔIBE " ΔICD (g.g) ⇒ $IE.IC = IB.ID$

Từ đó suy ra: $IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2 \Rightarrow \frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}$.

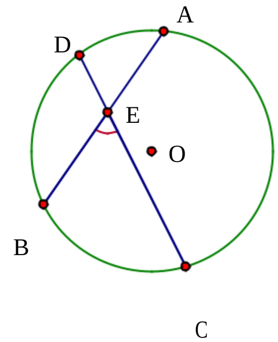
Ta có ΔIBE và ΔIAB có $\frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}$ và BIA chung , suy ra ΔIBE " ΔIAB (c.g.c) nên IBE = IAB .

Suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB(định lí bổ sung)

. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG VÀ BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

. Lý thuyết

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn



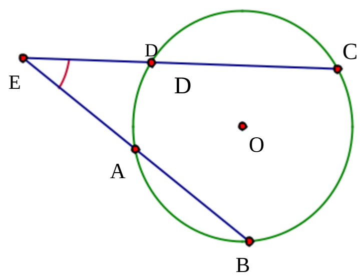
Trong hình bên thì :

BEC có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O) gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

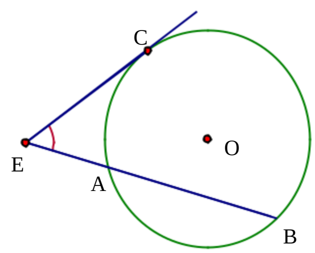
Định lí : Số đo góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$sđ\ BEC = \frac{1}{2}\left(sđ\ AD + sđ\ BC\right)$$

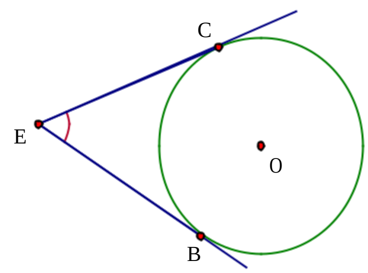
2 . Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.



H×nh a



H×nh b



H×nh c

Trong hình (a,b,c) thì :

BEC gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

Định lí : Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN

- ✓ Gặp bài toán tiên quan đến những góc có đỉnh ở bên trong hay bên ngoài đường tròn ta thường tính số đo của chúng theo số đo các cung bị chắn rồi biến đổi tổng hoặc hiệu của hai cung thành một cung
- ✓ Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- ✓ Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn

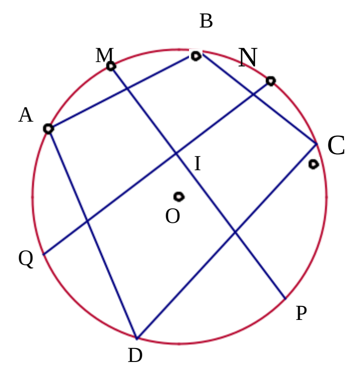
🗁. Bài tập.

Bài 1: Cho tứ giác ABCD có bốn đỉnh thuộc đường tròn . Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng : $MP \perp NQ$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $MP \perp NQ$ ta gọi I là giao điểm của MP và NQ và cần chứng minh $MIQ = 90^\circ$. Nhận thấy MIQ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, do vậy ta cần biểu diễn góc theo các cung của đường tròn và biến đổi các cung ấy.

Trình bày lời giải



Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Ta có.

$$MIQ = \frac{1}{2}(sđ\,MQ + sđ\,NP)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(sđ\,AB + sđ\,AD + sđ\,BC + sđ\,CD).$$

$$= \frac{1}{4}.360^o = 90^o$$. Vậy MP ⊥ NQ.

Bài 2: Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi E là giao điểm của MA và CD, F là giao điểm của MD và AB. Chứng minh rằng:

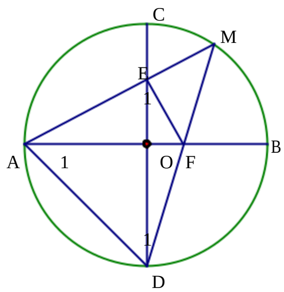
a) $DAE = AFD$;

Hướng dẫn giải

a) $DAE = \dfrac{sdDBM}{2}$ (góc nội tiếp) .

$AFD = \dfrac{sdDB + sd\,MB}{2} = \dfrac{sdDBM}{2}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Suy ra $DAE = AFD$


C
M
E
1
A
1
O
F
B
1
D

🗁. MỘT SỐ BÀI TẬP

DẠNG 1: GÓC NỘI TIẾP – GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

Bài 1: Tam giác ABC nội tiếp (O;R). Tia phân giác của góc A cắt (O) tại M. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại N. CMR:

a) Tam giác MBC cân.
b) 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài 2: Cho (O) và hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại M. (C thuộc cung nhỏ AB, B thuộc cung nhỏ CD).

a) CMR: cung AC = cung DB.
b) CMR: ΔMAC = ΔMDB.
c) Tứ giác ACBD là hình gì? CM?

Bài 3: Cho (O) và hai dây MA và MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA, MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

a) CMR: A, O, B thẳng hàng.
b) CMR: P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMBA.
c) Giả sử MA = 12cm, MB = 16cm, tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA.

Bài 4 : Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt (O) tại M.

a) CMR : tam giác BMC cân.
b) CMR : góc BMC = góc ABC + góc ACB.
c) Gọi D là giao điểm của AM và BC. CMR : AB. AC = AD. AM; MD. MA = MB^2.

Bài 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính CB, A thuộc nửa đường tròn sao cho AB < AC. Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC ở I. Kẻ AH vuông góc với BC. CMR:

a) AB là tia phân giác của góc IAH.
b) IA^2 = IB. IC.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (I) đường kính BH cắt AB ở M. Vẽ (K) đường kính CH cắt AC ở N.

a) Tứ giác AMHN là hình gì ? CM ?

b) CMR : MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) ?

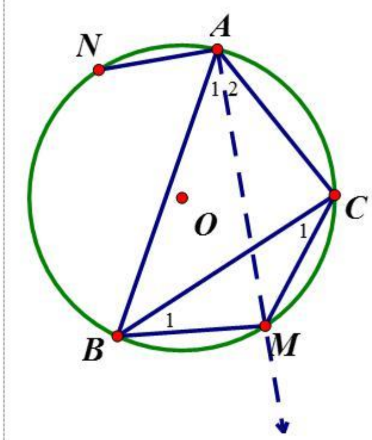
c) Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. CMR : Ax // MN.

Bài 7 : Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, lấy hai điểm M và N sao cho cung AM = cung MN = cung NB. Gọi P là giao điểm của AM và BN ; H là giao điểm của AN với BM. CMR :

a) Tứ giác AMNB là hình thang cân.
b) 4 điểm P, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.
c) PH vuông góc với AB.
d) ON là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PH.

HƯỚNG DẪN GIẢI DẠNG 1

Bài 1: a) Chứng minh rằng tam giác MBC cân



Có $A_1 = C_1$; $A_2 = B_1$.Mà $A_1 = A_2$ => $C_1 = B_1$. Vậy tam giác MBC cân tại M.

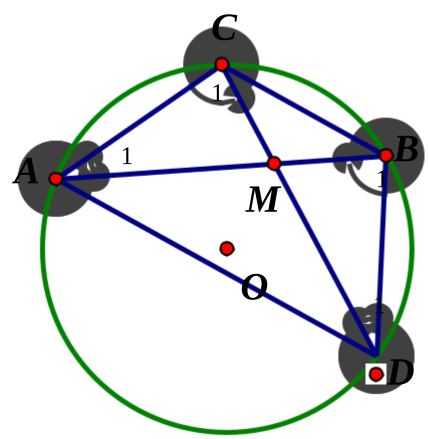
b) Chứng minh ba điểm M; O; N thẳng hàng:

Có AM và AN là 2 tia phân giác của hai góc kề bù

=> AM ⊥ AN => $MAN = 90^0$ => MN là đường kính của (O)

=> M; O; N thẳng hàng.

Bài 2:



a) Chứng minh rằng: $AC = DB$

- Có sđ AC + sđ CB = sđ AB
- Có sđ BD + sđ CB = sđ DC

⇨ $AC = DB$.

a) Chứng minh ΔMAC = ΔMDB.

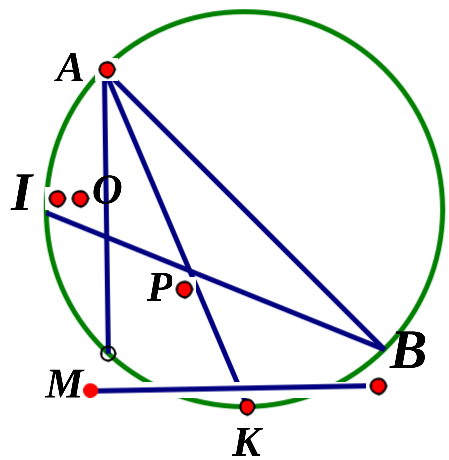
- Có $C_1 = B_1$;AC=BD; $A_1 = D_1$
  ⇒ ΔMAC = ΔMDB

Bài 3:

a) Chứng minh rằng 3 điểm A; O; B thẳng hàng.

b) CMR: P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMBA.

- Có I là điểm chính giữa cung nhỏ AM; K là điểm chính giữa cung nhỏ BM => AK; BI lần lượt là tia phân giác của các góc MAB và MBA của tam giác MBA => P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBA.



c) Giả sử MA = 12cm, MB = 16cm, tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA.

Giả sử r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA, a là độ dài cạnh huyền, p là nửa chu vi ΔMBA. Ta có: r = p – a

Bài 4:

a) Chứng minh rằng : tam giác BMC cân

- Có AM là tia phân giác của góc BAC =>

$BM = MC$ => BM = MC => tam giác BMC cân

b) Chứng minh rằng: $BMC = ABC + ACB$

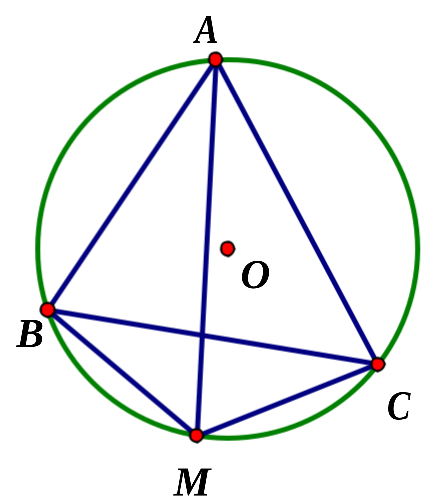
- Có $BMC = BMA + AMC$

Mà: $BMA = ACB$; $AMC = ABC$

⇨ $BMC = ABC + ACB$

c) Gọi D là giao điểm của AM và BC. CMR :

AB. AC = AD. AM; MD. MA = MB^2.

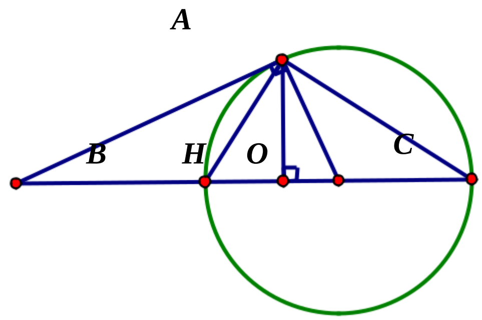


- ΔABD ~ ΔAMC => AB. AC = AD. AM
- ΔMBD ~ ΔMAB => MD. MA = MB^2

Bài 5:

a) CMR: AB là tia phân giác của IAH

- $IAB = ACB$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

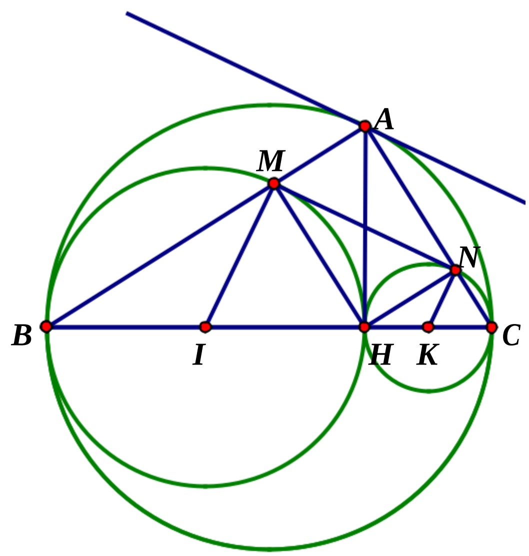


⇨ $BAH = ACB$ (cùng phụ với ABH)

⇨ $IAB = BAH$

b) CMR: IA_2 = IB. IC: Có ΔIAB ~ ΔICA => IA_2 = IB. IC

Bài 6:



a) Tứ giác AMHN là hình gì ? CM ?

- Tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

b) CMR: MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

- Có AMHN là hình chữ nhật

=> $NMH = AHM$

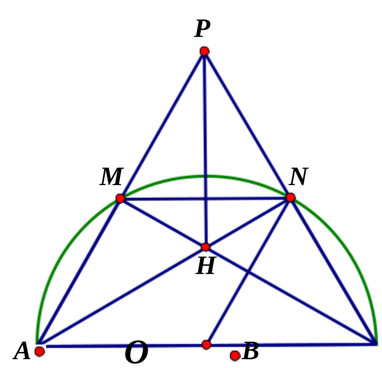
=> $NMH = MBH$ => MN là tiếp tuyến của (I)

- Chứng minh tương tự ta có MN là tiếp tuyến của (K).

c) Có Ax là tiếp tuyến của (O) => $xAB = ACB$

=> $ACB = NHA = NMA$ => $xAB = NMA$ => Ax // MN

Bài 7 :



a) Tứ giác AMNB là hình thang cân.

- Tứ giác AMNB có MN // AB => AMNB là hình thang.

Lại có: AN = BM => AMNB là hình thang cân.

b) 4 điểm P, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

- Có $\widehat{AMB} = 90^0$ => $\widehat{PMH} = 90^0$ => P; M; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.
- Có $\widehat{ANB} = 90^0$ => $\widehat{PNH} = 90^0$ => P; N; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.
  - ⇨ P; M; N; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.

c) PH vuông góc với AB

- Có H là trực tâm tam giác PAB => PH vuông góc với AB.

d) ON là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PH.

- Có $\widehat{ONA} = \widehat{NPH} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NH}$ của đường tròn đi qua 4 điểm P; M; H; N mà cung NH nằm trong góc ONH => góc ONH là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung NH => ON là tia tiếp tuyến của đường tròn đi qua 4 điểm P; M; H; N.

DẠNG 2: GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG VÀ BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho đường tròn (O) trong đó có ba dây bằng nhau AB, AC, BD sao cho hai dây AC, BD cắt nhau tại M tạo thành góc vuông AMB. Tính số đo các cung nhỏ AB, CD.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và dây AB. Vẽ tiếp tuyến xy // AB có M là tiếp điểm. Chứng minh rằng ΔMAB là tam giác cân.

Bài 3. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Vẽ dây CD // AB. Đường thẳng AD cắt đường tròn tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M. Chứng minh:

a) $MB_2 = MC.ME$; b) M là trung điểm của AB

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $AB_2 = BC.BD$ b) $\frac{BC}{BD} = \frac{AC^2}{AD^2}$

Bài 5. Cho đường tròn (O) và hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên cung BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt AB ở E ; CM cắt AB tại F.
Chứng tỏ EF = EM.

Bài 6. Cho tam giác ABC, phân giác trong AD. Đường tròn (O) đi qua A, tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn (O) cắt AB, AC tương ứng tại M và N. Chứng minh MN // BC.

Bài 7. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD với đường tròn (B là tiếp điểm, C nằm giũa A và D). Tia phân giác của góc CBD cắt đường tròn tại m, cắt CD tại E và cắt tia phân giác của góc BAC tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH \perp BE$; b) $MD_2 = MB . ME$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và C là điểm nằm giữa A và B. Tia MC cắt đường tròn tại một điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng $MA_2 = MC . MD$.

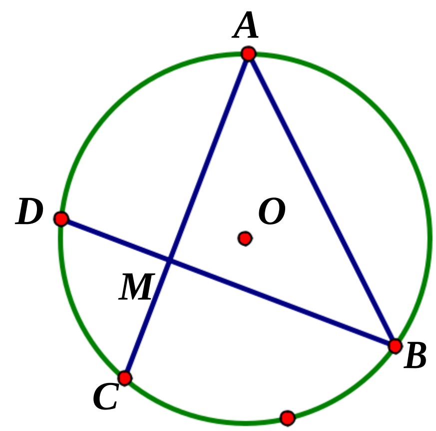
b) Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Vẽ đường kính MN của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm A, O', N thẳng hàng.

Bài 9. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD ⊥ AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M. Các đường thẳng CM và DM cắt đường thẳng AB lần lượt tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng N là trung điểm của EF.

HƯỚNG DẪN GIẢI DẠNG 2

Bài 1. Đường tròn (O) có dây: AB = AC = BD



Suy ra sđ AB = sđ AC = sđ BD

Do đó: sđ AD = sđ AC - sđ CD

= sđ BD - sđ DC = sđ BC

Theo định lý góc có đỉnh bên trong đường tròn, ta có:

sđ AD + sđ BC = 2. sđ BMC = $2.90^0 = 180^0$

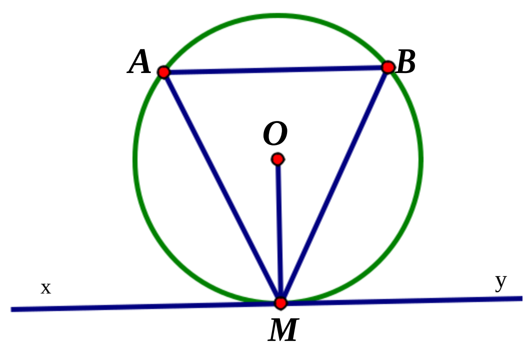
nên sđ AD = sđ BC = 90^0

Lại có: sđ AB + sđ CD = 2. sđ ABC = 180^0

Hơn nữa sđ AB = sđ BD = sđ BC + sđ DC = 90^0 + sđ DC

Suy ra: sđ DC = 45^0; sđ AB = $90^0 + 45^0 = 135^0$

Bài 2. Ta có OM ⊥ xy (tính chất của tiếp tuyến)

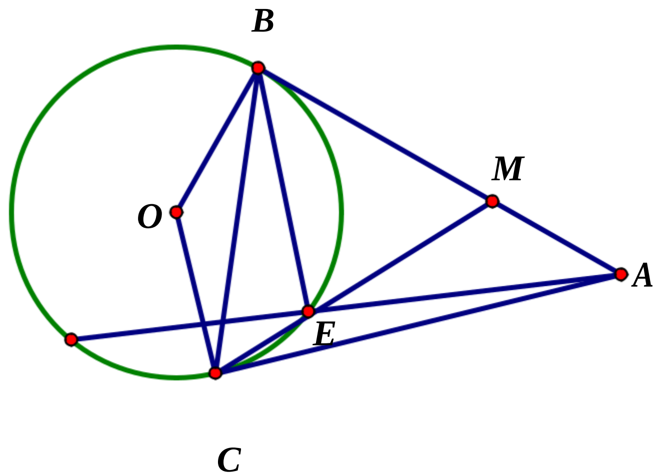


Mà xy // AB nên

Suy ra MA = MB (định lý đường kính vuông góc với dây cung)

Do đó MA = MB (hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau)

Bài 3.



a) ΔMBE và ΔMCB có

M_1 chung; $B_1 = C_2$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Nên ΔMBE # ΔMCB (g.g)

MB ME

Suy ra MC = MB

Do đó $MB^2 = MC.ME$ (1)

b) Ta có CD // AB nên $A_1 = D_1$ (cặp góc so le trong)

Mặt khác $C_1 = D_1$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CE).

⇨ $A_1 = C_1$

Xét ΔMAE và ΔMCA có: M_2 chung; $A_1 = C_1$ (chứng minh trên)

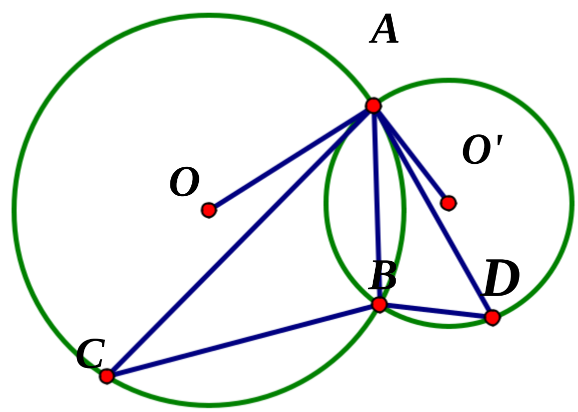
Vậy ΔMAE # ΔMCA (g.g). Suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MA}$

Do đó $MA^2 = MC.ME$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 = MB^2$ do đó MA = MB

Bài 4. a) ΔABC và ΔDBA có

$A_1 = D_1$; $C = A_2$



(góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cung chắn cung AB) Do đó ΔABC # ΔDBA (g.g)

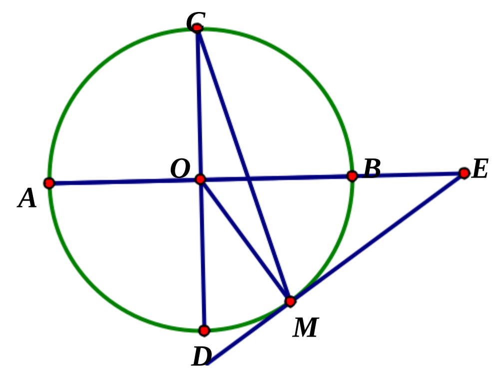
Suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{CB}{AB}$. Vậy $AB^2 = BC.BD$

b) ΔABC # ΔDBA (chứng minh trên) => $\frac{AB}{BD} = \frac{CB}{AB} = \frac{AC}{DA}$

Do đó $\frac{AB}{BD} . \frac{CB}{AB} = \frac{AC}{DA} . \frac{AC}{DA}$. Vậy $\frac{BC}{BD} = \frac{AC^2}{AD^2}$

Bài 5.

Đường tròn (O) có:



$EMF = \frac{1}{2}$ sđ CBM (góc giữa tiếp tuyến và dây đi qua tiếp điểm)

$\Rightarrow EMF = \frac{1}{2}$ (sđ MB + sđ BC)

$EFM = \frac{1}{2}$ (sđ MB + sđAC) (góc có đỉnh ở trong đường tròn (O)

Mà: sđ BC = sđ AC = 90^o (vì $CD \perp AB$).

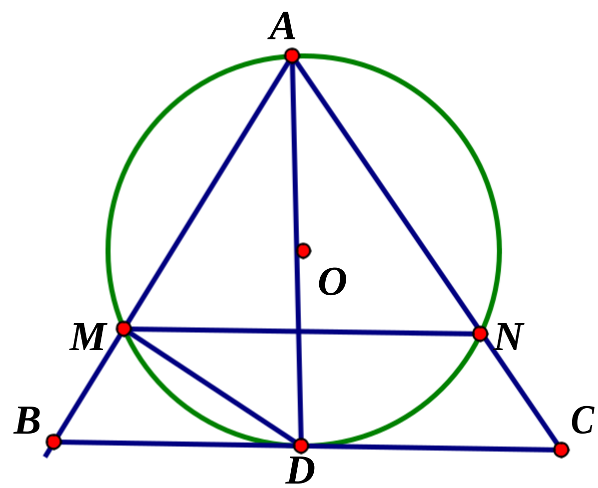
Do đó: EMF = EFM $\Rightarrow$ ΔEFM cân tại E. Vậy: EF = EM.

Bài 6. Chứng minh $\Delta BMD \sim \Delta BDA$, suy ra

$BD^2 = BM.BA$

Tương tự, cũng có $CD^2 = CN . CA$, suy ra

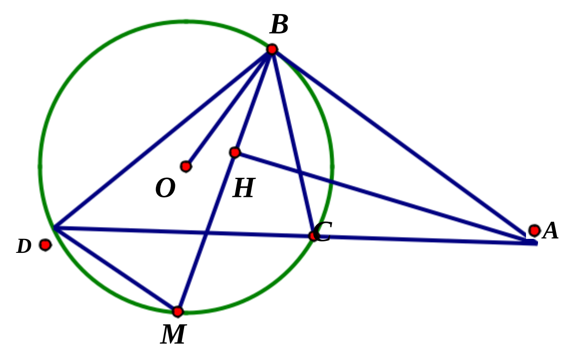
$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{BM.BA}{CN.CA}$



Mà $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CA}$, suy ra $\frac{AB^2}{CA^2} = \frac{BM.BA}{CN.CA}$ nên

$\frac{BM}{CN} = \frac{BA}{CA} \Rightarrow MN // BC$

Bài 7.



a) Vì $\widehat{CBM} = \widehat{DBM}$ nên $MC = MD$
(hai góc nội tiếp bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

Góc AEB là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{AEB} = \frac{sđ\, BC + sđ\, MD}{2}$$

$$= \frac{sđ\, BC + sđ\, MC}{2} = \frac{sđ\, BCM}{2} \quad (1)$$

Góc ABM là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên sđ $\widehat{ABM} = \frac{sđ\, BCM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ABM}$, do đó ΔABE cân tại A.

Có AH là tia phân giác của góc A nên $AH \perp BE$

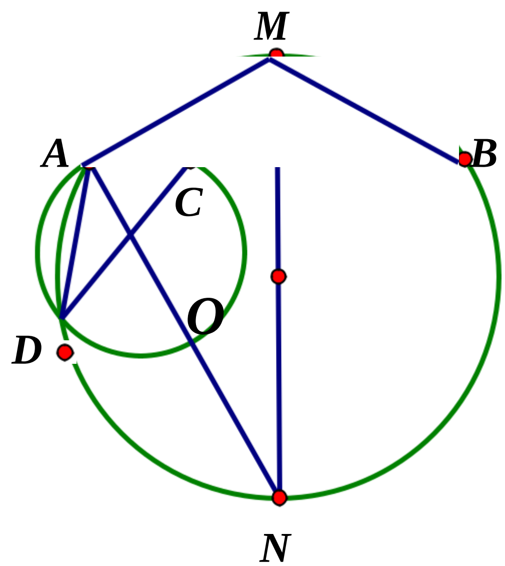
b) ΔMDE và ΔMBD có

$\widehat{MDE} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau); $\widehat{M}$ chung.

nên ΔMDE # ΔMBD (g. g).

Suy ra $\frac{MD}{MB} = \frac{ME}{MD}$, do đó MD^2 = MB. ME

Bài 8.



a) ΔMAC và ΔMDA có: M_1 chung;

MAC = MDA (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Vậy ΔMAC # ΔMDA (g. g).

Suy ra $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$.

Do đó MA^2 = MC . MD.

b) Ta có: MAC = D (chứng minh trên), mà D = $\frac{\text{sđ AC}}{2}$, nên MAC = $\frac{\text{sđ AC}}{2}$

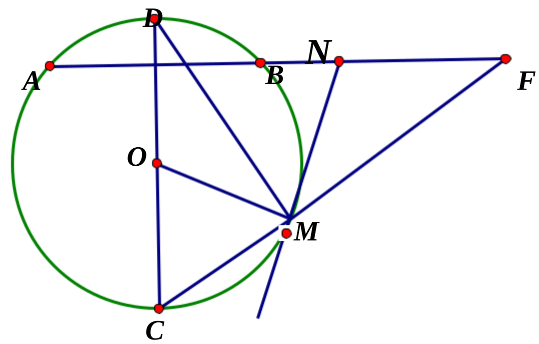
⇨ AM là một tia tiếp tuyến của đường tròn (O’) (Định lí đảo của định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

c) Ta có MAN = 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MN).

Suy ra NA ⊥ AM . Mặt khác O 'A ⊥ AM (tính chất của tiếp tuyến).

Qua điểm A chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với AM, do đó ba điểm A, O’, N thẳng hàng

Bài 9 . Ta sẽ chứng minh NE = NF bằng cách dùng NM làm trung gian.



Ta có CD ⊥ AB nên DA = DB và CA = CB
(định lí đường kính vuông góc với dây cung).

Góc F_1 là góc có đỉnh ở bên trong một đường tròn nên:

$$F_1 = \frac{\text{sđ BM + sđ AD}}{2} = \frac{\text{sđ BM + sđ BD}}{2} = \frac{\text{sđ MBD}}{2} \quad (1)$$

M_3 là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên $M_3 = \frac{\text{sđ MBD}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $F_1 = M_3$ do đó ∆NMF cân tại N, suy ra NF = NM.
Góc E là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn nên:

$$E = \frac{\text{sđ AC − sđ BM}}{2} = \frac{\text{sđ BC − sđ BM}}{2} = \frac{\text{sđ MC}}{2} \quad (3)$$

Góc M_2 là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên $M_2 = \frac{\text{sđ MC}}{2}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $E = M_2$, dẫn tới $E = M_1$ (vì $M_1 = M_2$)

Do đó ∆NME cân, suy ra NE = NM tại N. Do vậy NE = NF. Vậy N là trung điểm của EF